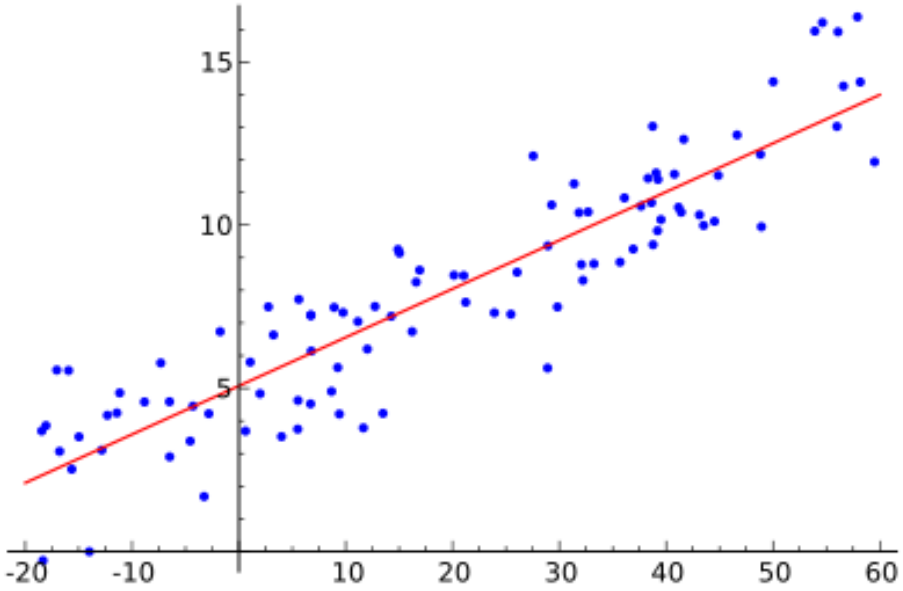
Princípios em Planejamento e Análise de Dados Ecológicos

Regressão linear



Camila de Toledo Castanho

2025

Conteúdo da aula

1. Regressão linear simples: quando usar
2. A reta de regressão linear
3. Teste de significância da regressão
4. Coeficiente de determinação (r^2)
5. Pressupostos do teste
6. Procedimentos diagnósticos
7. Roteiro

1. Quando usar?

- Suposição de relação de causa-efeito entre duas variáveis contínuas

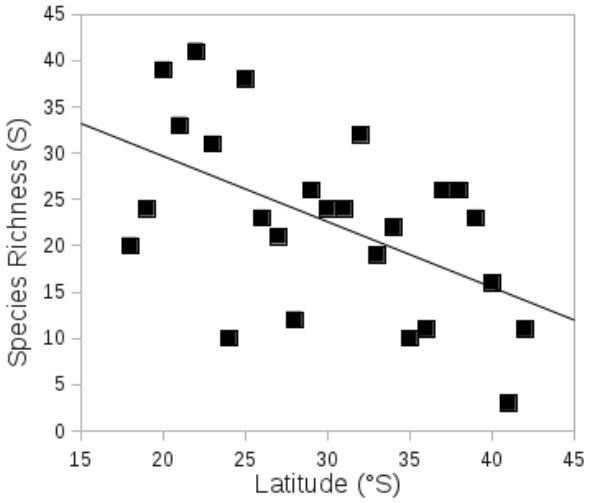
  Eixo X= variável preditora; explicativa ou independente

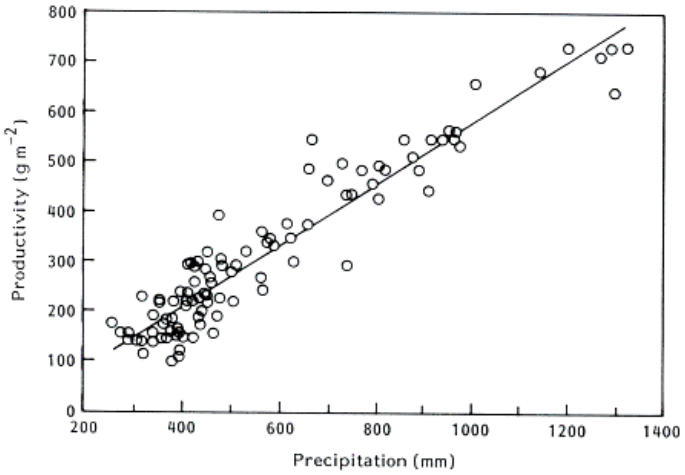
  Eixo Y= variável resposta ou dependente

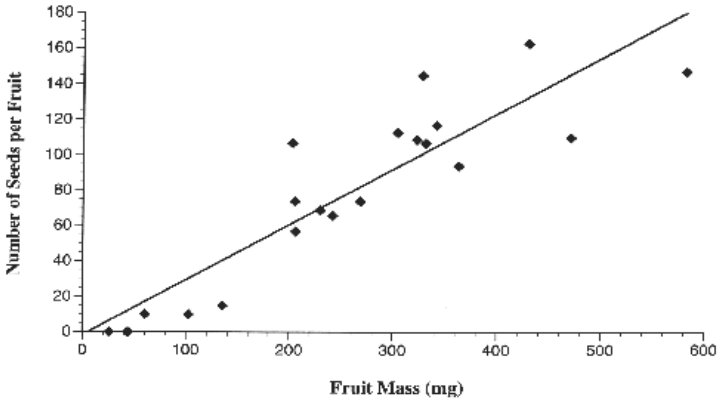
✓ Para cada valor de x observa-se o valor correspondente de y

✓ Os valores de x são em geral selecionados no sentido de obter ampla variação desta variável

Objetivos: avaliar possível dependência de y em relação à x e expressar matematicamente essa relação







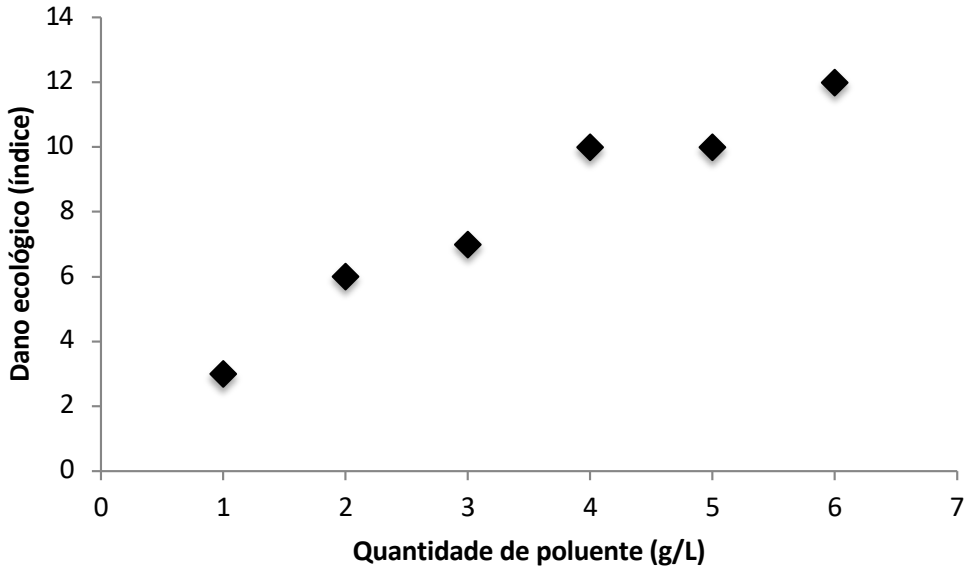
2. A reta de regressão linear

• Primeiro passo: visualização dos dados ➔ gráfico de dispersão dos pontos

Fornece uma boa idéia da existência de dependência

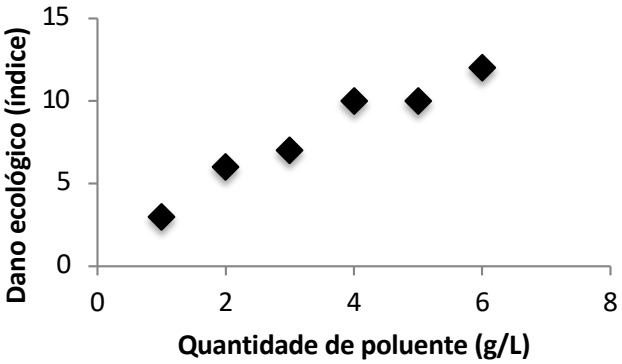
EXEMPLO

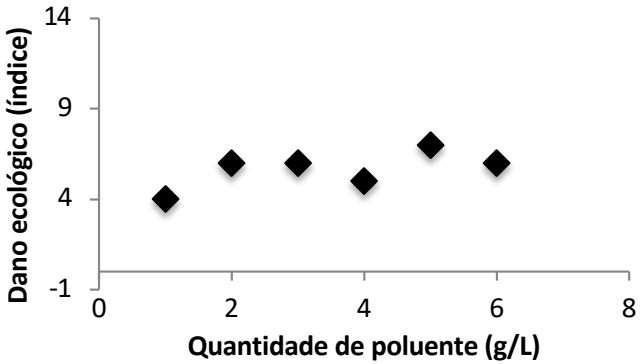
Relação entre certo poluente despejado por uma fábrica em um riacho e o dano ecológico na água, medido por um índice.

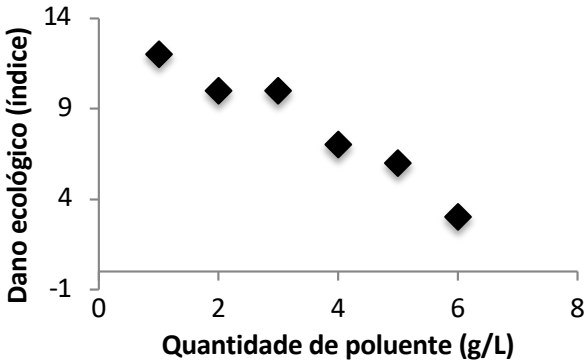


Aparentemente há uma **dependência positiva** de y em relação à x

2. A reta de regressão linear







Dependência positiva

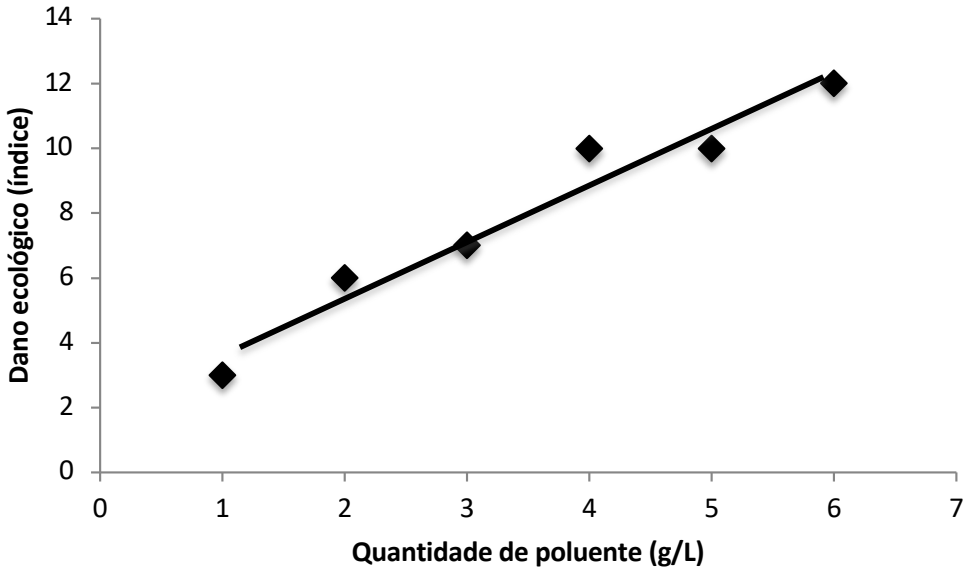
Ausência de dependência

Dependência negativa

2. A reta de regressão linear

EXEMPLO

Relação entre certo poluente despejado por uma fábrica em um riacho e o dano ecológico na água, medido por um índice.



Tal dependência poderia ser genericamente representada por uma ***linha reta***

Análise de regressão linear simples

- procedimento que fornece equação de *linha reta* ➔ **linear**
- *uma* variável preditora ➔ **simples**

2. A reta de regressão linear

EQUAÇÃO DA RETA

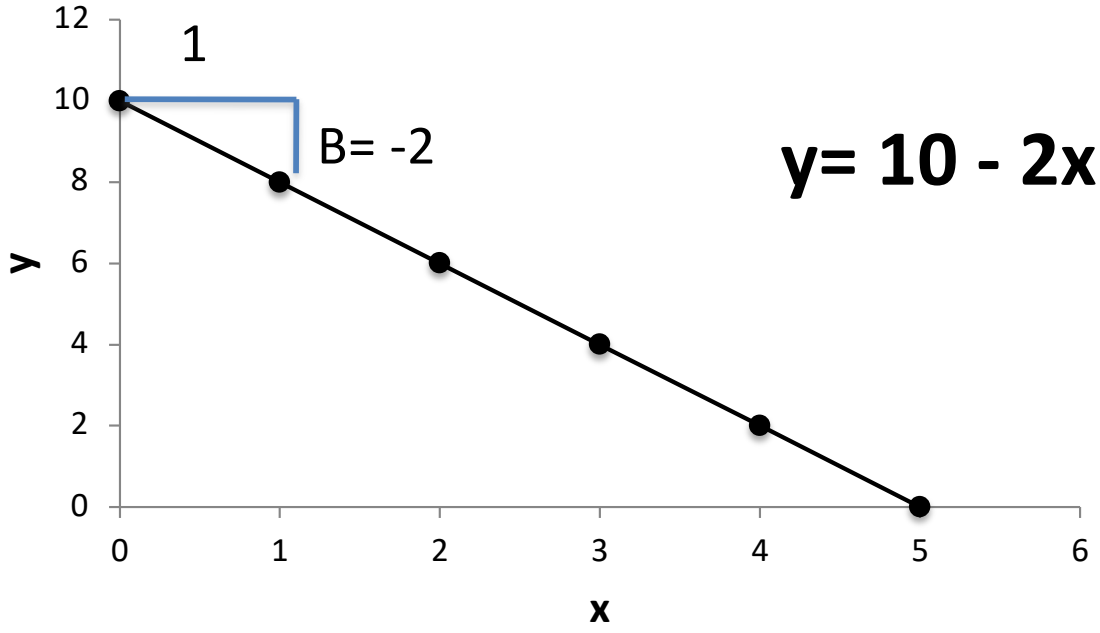
$$y = A + Bx$$

y= variável dependente

A= intercepto (valor de y qdo x=0)

B= coeficiente angular (inclinação da reta: acréscimo ou decréscimo em y para cada acréscimo de unidade em x)

x= variável independente



y= 10 - 2x

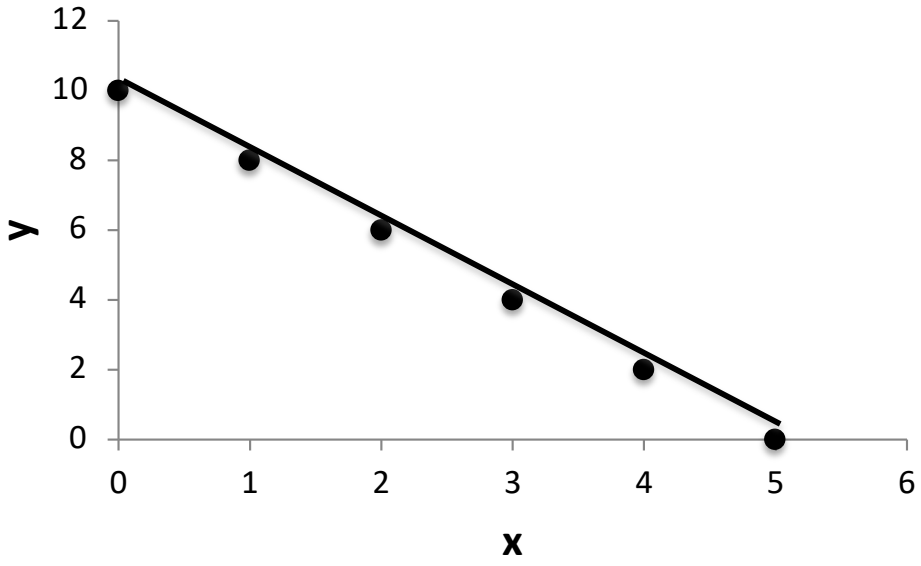
2. A reta de regressão linear

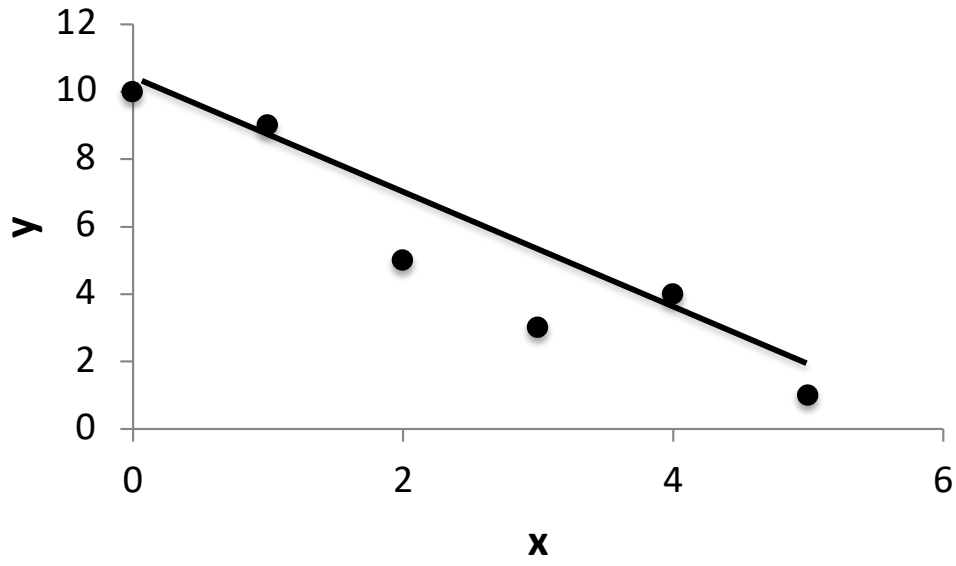
EQUAÇÃO DA RETA

$$y = A + Bx$$

y é um valor que depende de x, mas uma vez que x assume um valor y é fixo

Dados biológicos → Variação

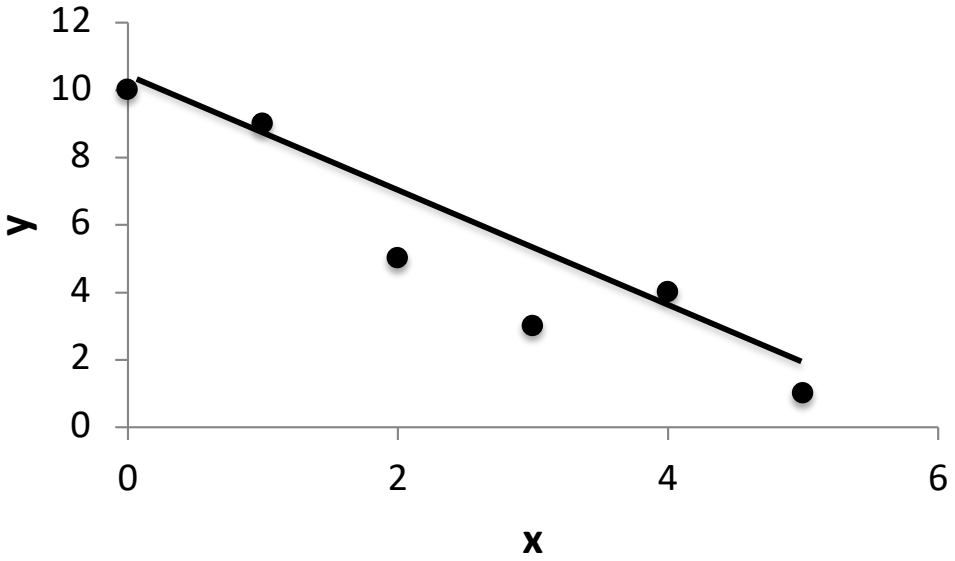




Desalinhamentos → interpretados como **desvios, ao acaso, do comportamento geral**

$$y = A + Bx + \varepsilon$$

2. A reta de regressão linear

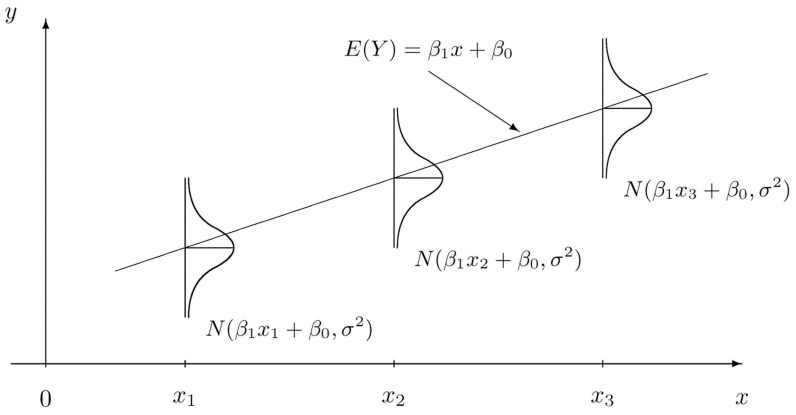


$$y = A + Bx + \varepsilon$$

Desalinhamentos➔ interpretados como **desvios, ao acaso, do comportamento geral**

ε = erro ou resíduo

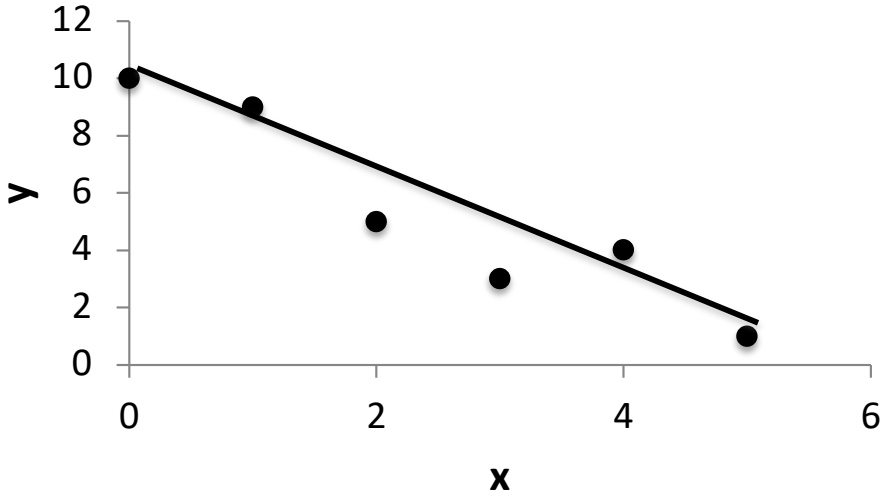
• A linha reta representa o comportamento de valores de y médios esperados para distintos valores de x



• Exemplo: para x=2 existe um conjunto de valores de y possíveis, sendo que a média destes valores está sobre a reta de regressão

• Pressuposto: a variação é sempre a mesma

2. A reta de regressão linear

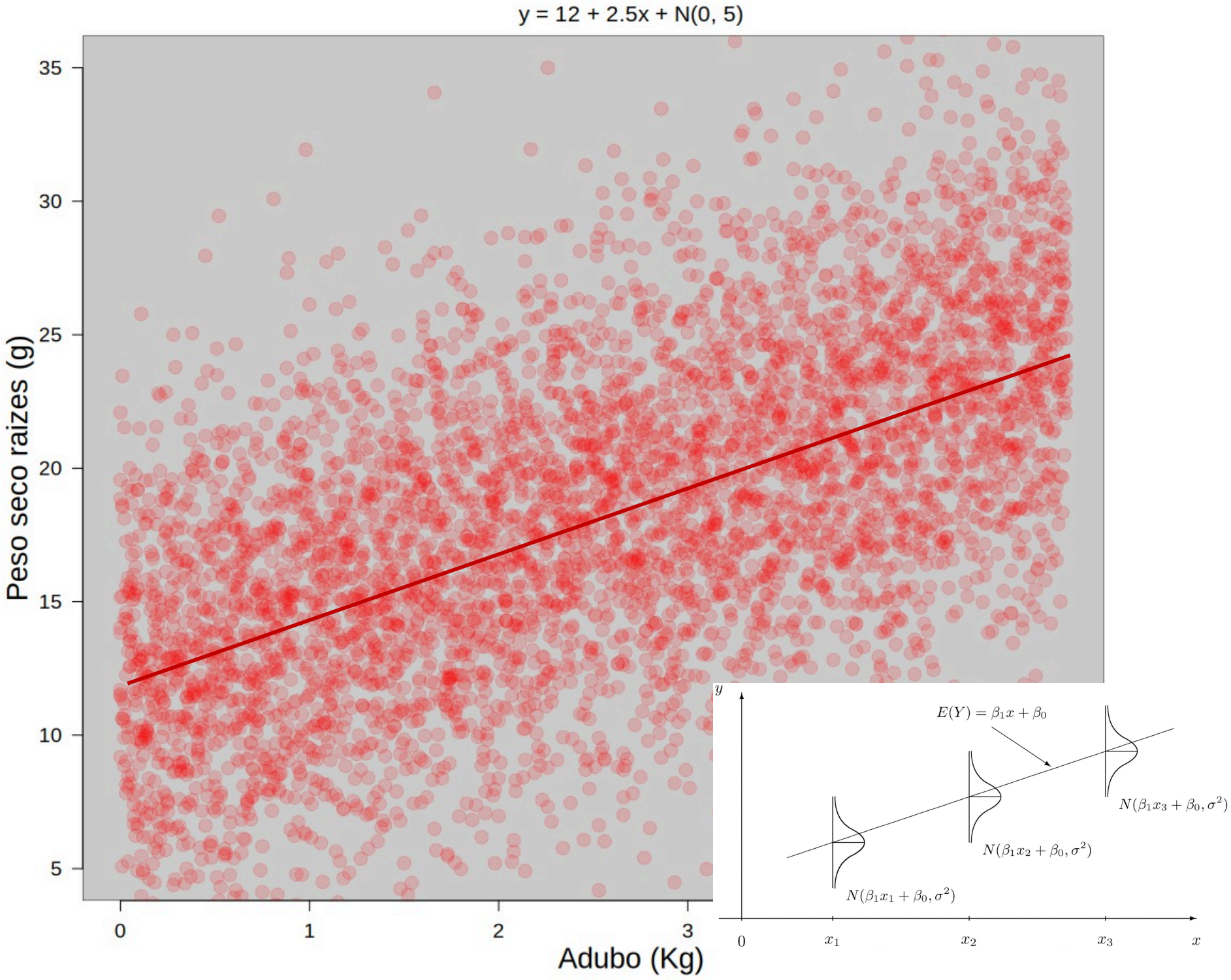


OBTENÇÃO DA RETA DE REGRESSÃO

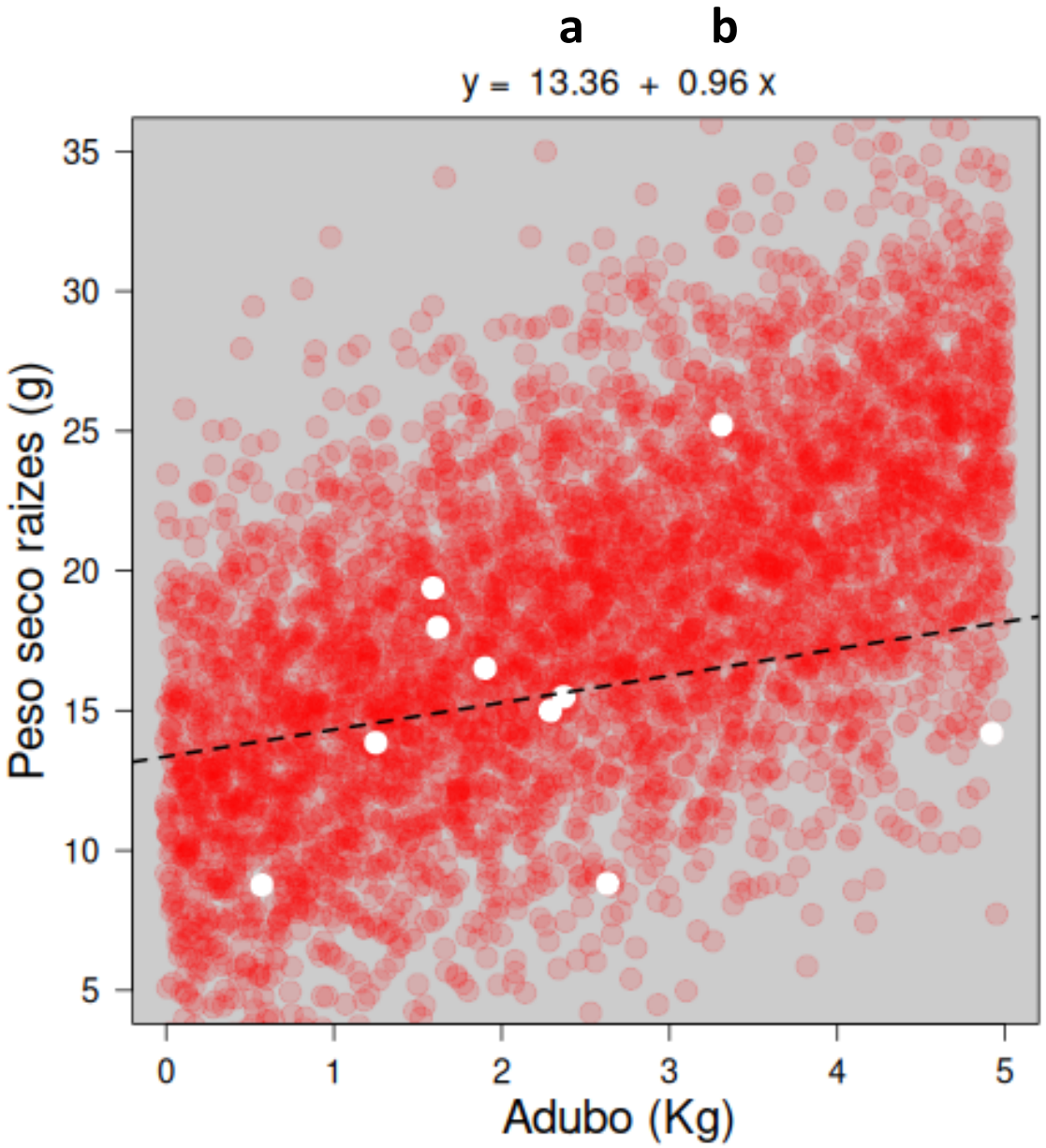
• A reta de regressão **verdadeira** seria obtida se fossem conhecidos os valores de x e y para **todos os indivíduos da população**

• No entanto, em geral temos apenas uma **amostra** da população

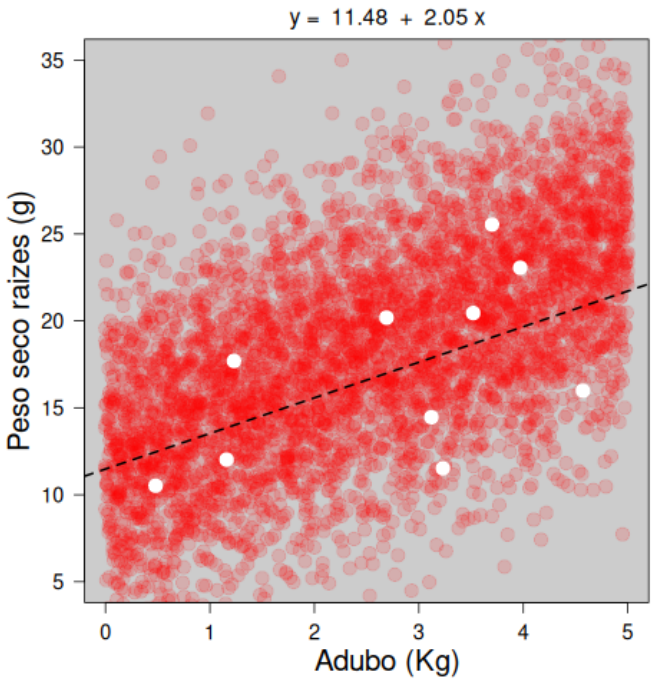
Estimativa dos parâmetros A e B ➔ a e b


y = 12 + 2.5x + N(0, 5)
Peso seco raizes (g)
Adubo (Kg)
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
y
$E(Y) = \beta_1 x + \beta_0$
$N(\beta_1 x_1 + \beta_0, \sigma^2)$
$N(\beta_1 x_2 + \beta_0, \sigma^2)$
$N(\beta_1 x_3 + \beta_0, \sigma^2)$
0
x_1
x_2
x_3
x

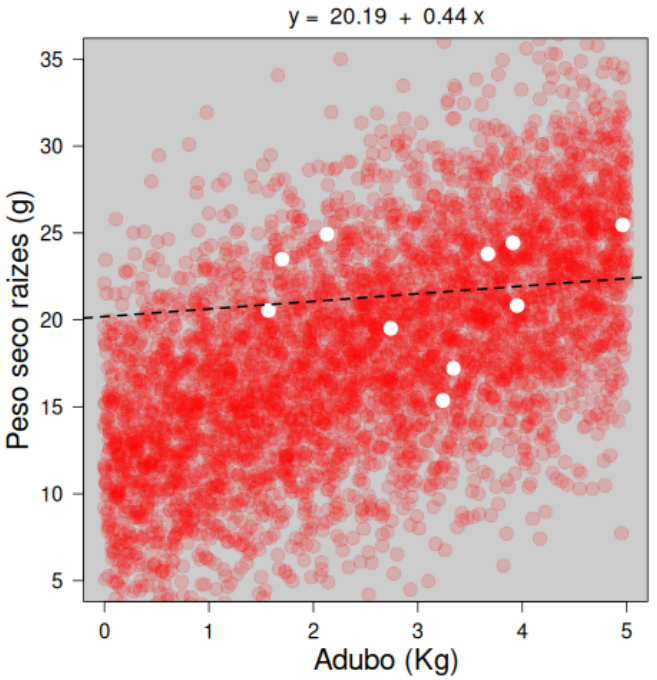
Amostra $_1$= 10


a
b
y = 13.36 + 0.96 x
Peso seco raizes (g)
35
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
Adubo (Kg)

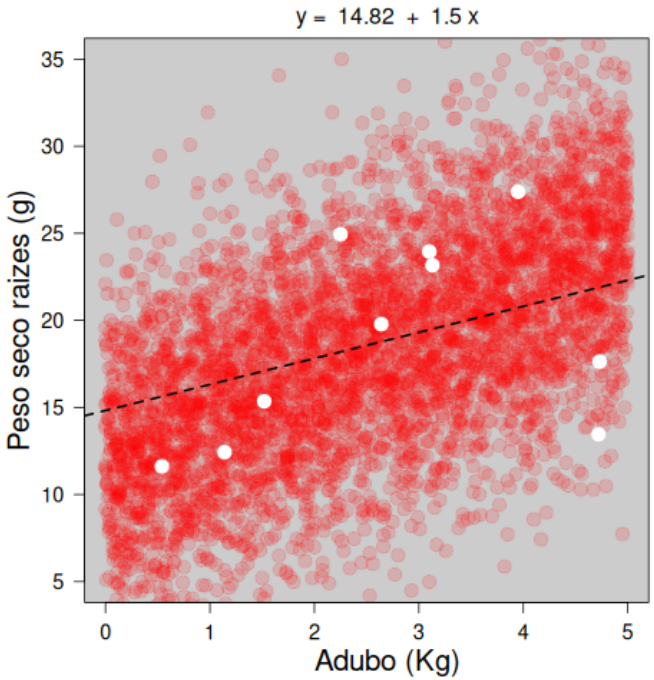
Amostra 2



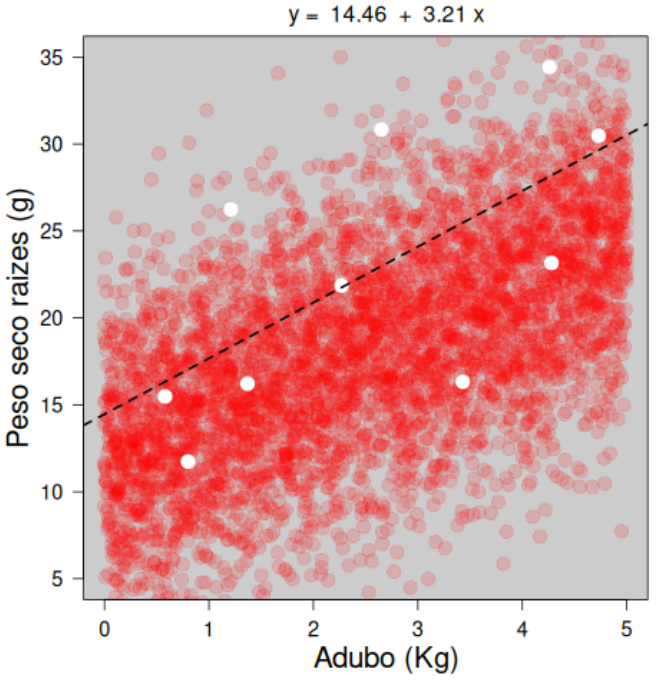
Amostra 3



Amostra 4

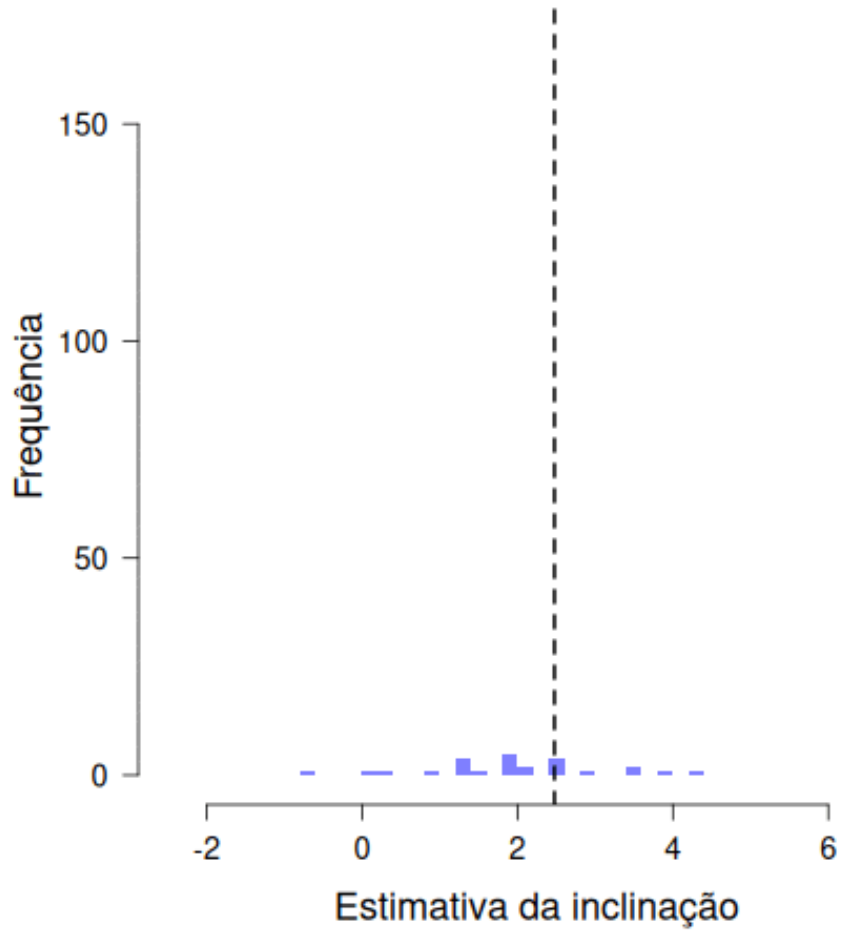


Amostra 5



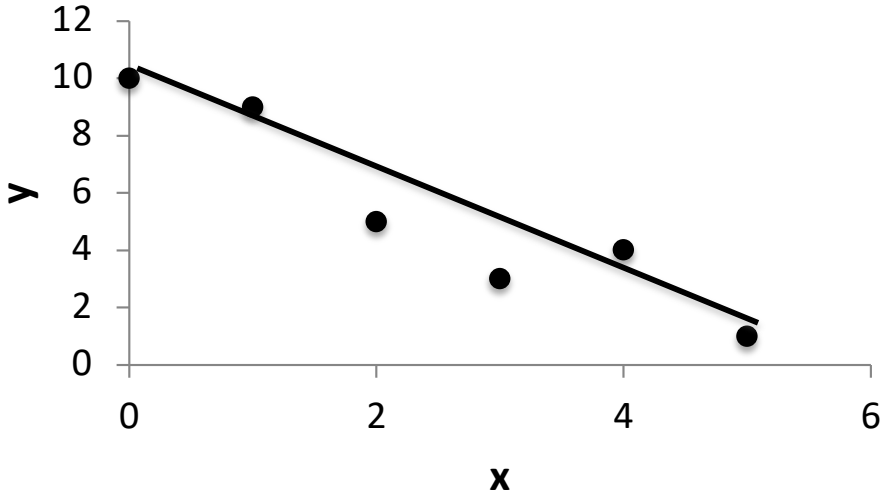
1000 simulações com amostras de tamanho 10

Registro do valor da inclinação amostral (b)



B=2.5

2. A reta de regressão linear



OBTENÇÃO DA RETA DE REGRESSÃO

• A reta de regressão **verdadeira** seria obtida se fossem conhecidos os valores de x e y para **todos os indivíduos da população**

• No entanto, em geral temos apenas uma **amostra** da população

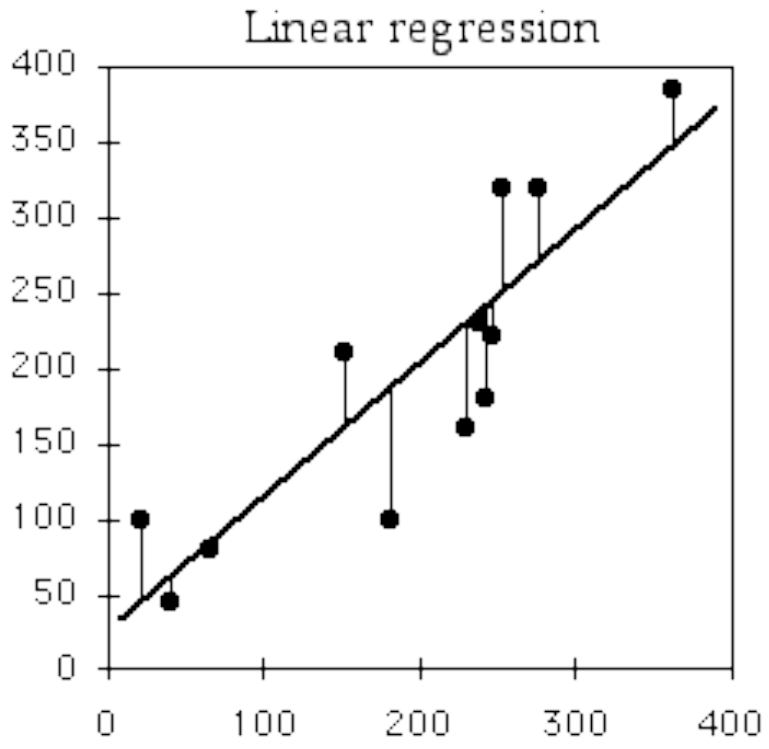
Estimativa dos parâmetros A e B ➔ a e b

• *Método dos mínimos quadrados*: método usado para definir a reta e obter a e b

2. A reta de regressão linear

- *Método dos mínimos quadrados*: método usado para definir a reta e obter a e b

  Garante que a reta obtida é aquela na qual se tem as menores distâncias (ao quadrado) entre os valores observados (y) e a própria reta (**soma dos quadrados dos resíduos – SQR**)



$$\hat{y} = a + bx$$

ŷ = valor esperado de y para cada valor de x

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n}$$

$$b = \frac{n \sum (xy) - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

3. Teste de significância da regressão

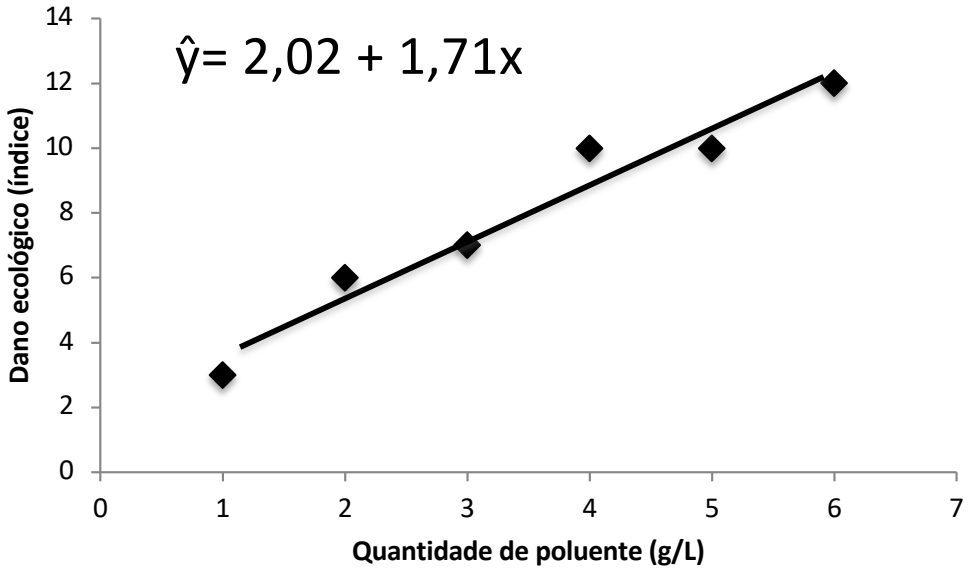
Coeficiente angular (b) → Representa a dependência de y em relação a x

No entanto, trata-se de uma estimativa do B verdadeiro já que baseia-se em uma amostra

3. Teste de significância da regressão

Coeficiente angular (b) ⇒ Representa a dependência de y em relação a x

No entanto, trata-se de uma estimativa do B verdadeiro já que baseia-se em uma amostra



b= 1,71 representa uma dependência real de y em relação à x?

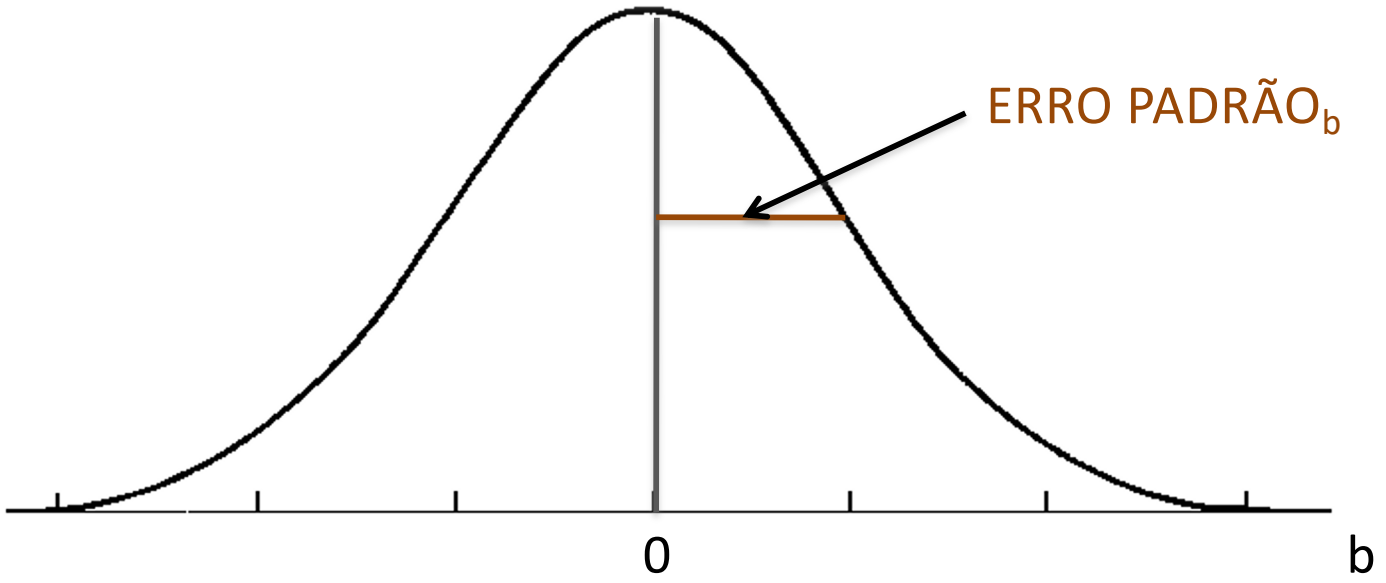
TESTE DE HIPÓTESE sobre a existência de dependência na população

3. Teste de significância da regressão

RACIOCÍNIO DO TESTE

- Testar a hipótese de que B é diferente de 0

B=0 ➔ y não depende de x



- Para testar a hipótese de que B não é zero, determina-se o número crítico de erros padrão permitido para um afastamento não-significativo entre b e B, em unidades de erro padrão (t_{calc}).

- Se o valor calculado exceder o valor crítico, rejeita-se a hipótese de que b representa um desvio ao acaso de B=0 ➔ y depende de x

3. Teste de significância da regressão

ETAPAS DO TESTE

Exemplo: poluente no riacho e dano ecológico

1) Hipóteses estatísticas

H_0: B= 0 H_1: B≠ 0

2) Nível de significância

α= 0,05

3) Determinação do valor crítico do teste

gl= n-2 gl= 6-2=4 n= número de pontos

$t_{\alpha;gl} = t_{0,05;4} = 2,77$

Atenção: bicaudal

3. Teste de significância da regressão

4) Determinação do valor calculado do teste

$$t_{calc} = \frac{b - B}{EP_b} = \frac{b}{EP_b}$$

$$EP_b = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a\sum y - b\sum xy}{(n-2)\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)}}$$

B= 0 pois suponhe-se que H_0 é verdadeira

t_{calc}= 1,71/0,187= **9,144**

5) Decisão

P<= 0,0001

Como $|t_{calc}| = 9{,}144 > t_{0,01;4} = 2{,}77$ ⇒ **REJEITA-SE H_0**

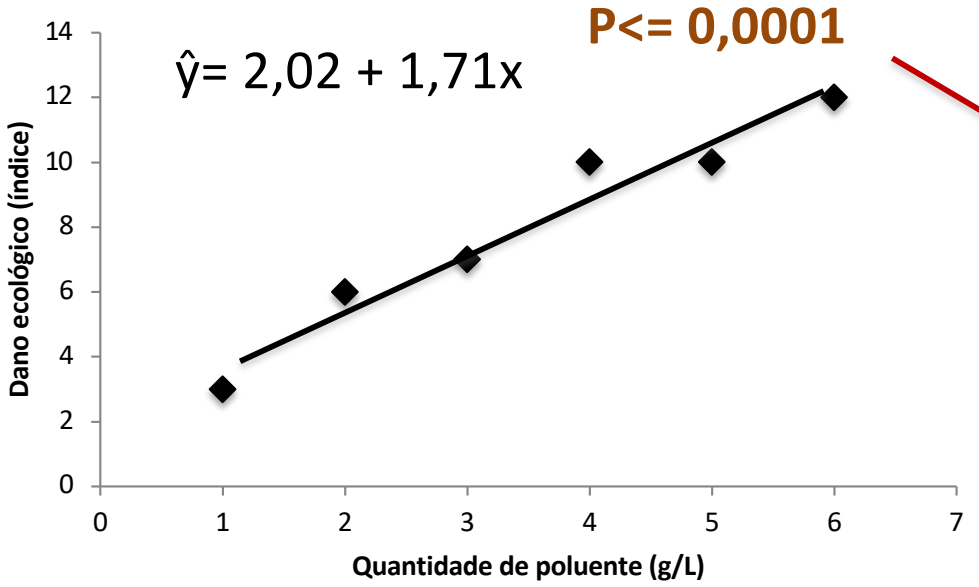
3. Teste de significância da regressão

6) Conclusão

Dado que o coeficiente angular populacional (B) não deve ser zero; logo admitimos que existe regressão de y sobre x (α= 0,05)

O dano ecológico depende da concentração do poluente, de forma que para cada acréscimo de um g/L de poluente na água, espera-se que o índice de dano ecológico aumente 1,71 unidades.

Tamanho de efeito
(relevância biológica)



Significância

- incompatibilidade dos dados com H0
- clareza quanto ao efeito do poluente

4. Coeficiente de determinação – r^2

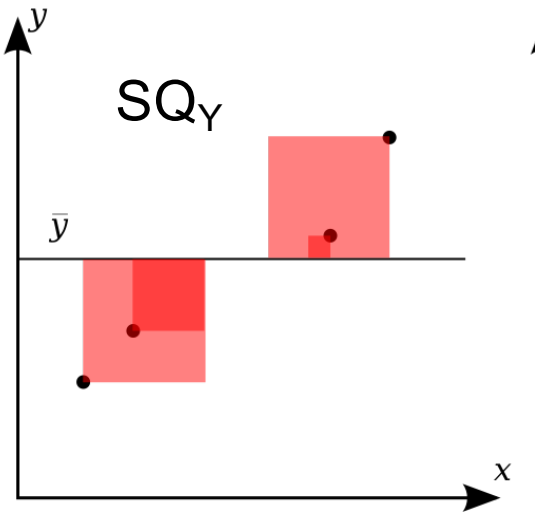
Componentes da variação

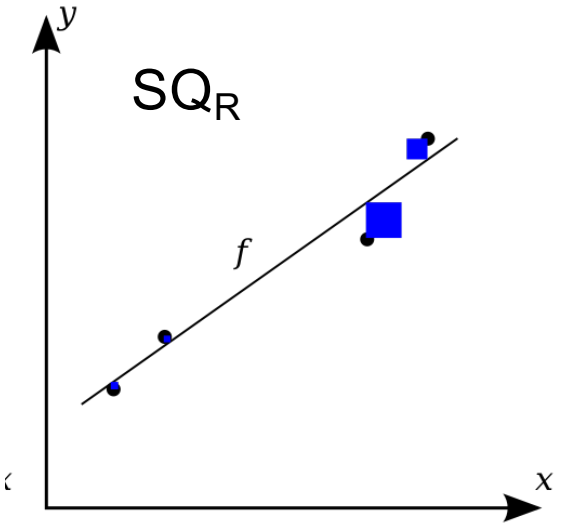
$$SQ_Y = SQ_{reg} + SQR$$

SQ_Y= soma dos quadrados da variável Y (**variação total**)

SQR= soma dos quadrados dos resíduos (**erro aleatório**)

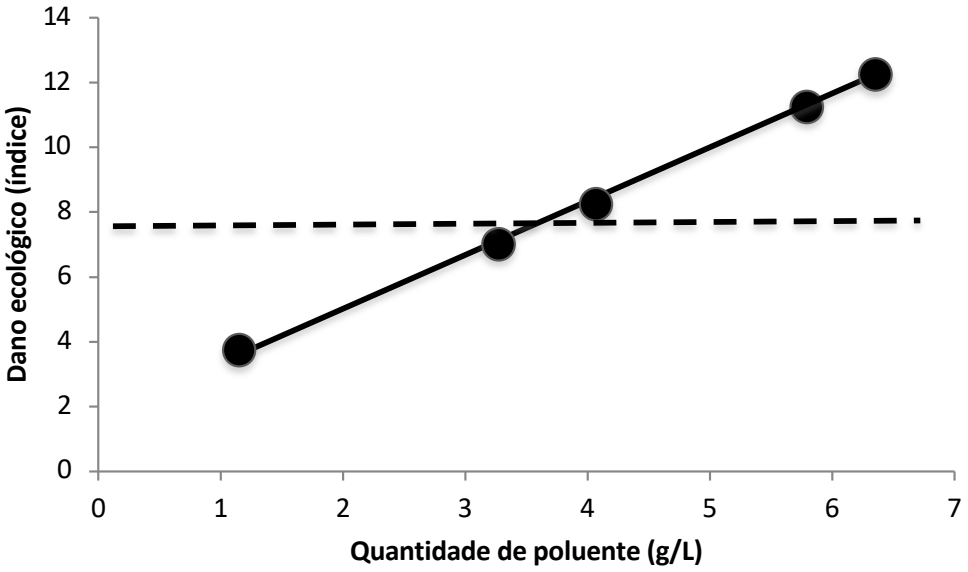
SQ_{reg}= componente da variação atribuído ao modelo de regressão (**sistemática**)

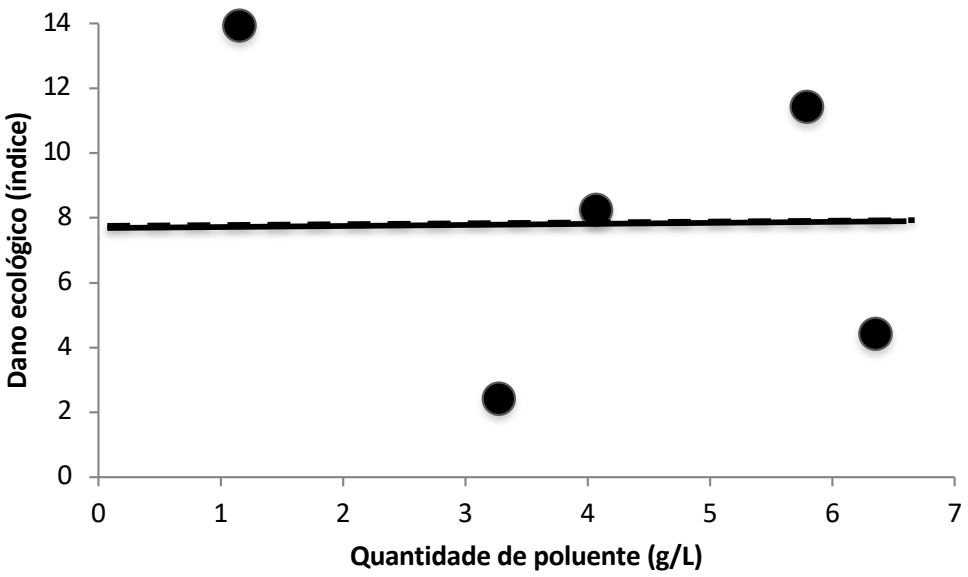




•https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination

4. Coeficiente de determinação – r^2





$SQ_Y = SQ_{reg} + SQR$

$SQ_Y = SQ_{reg}$

0

$SQ_Y = SQ_{reg} + SQR$

0

$SQ_Y = SQR$

Entre estes dois extremos estão a maior parte dos dados ecológicos

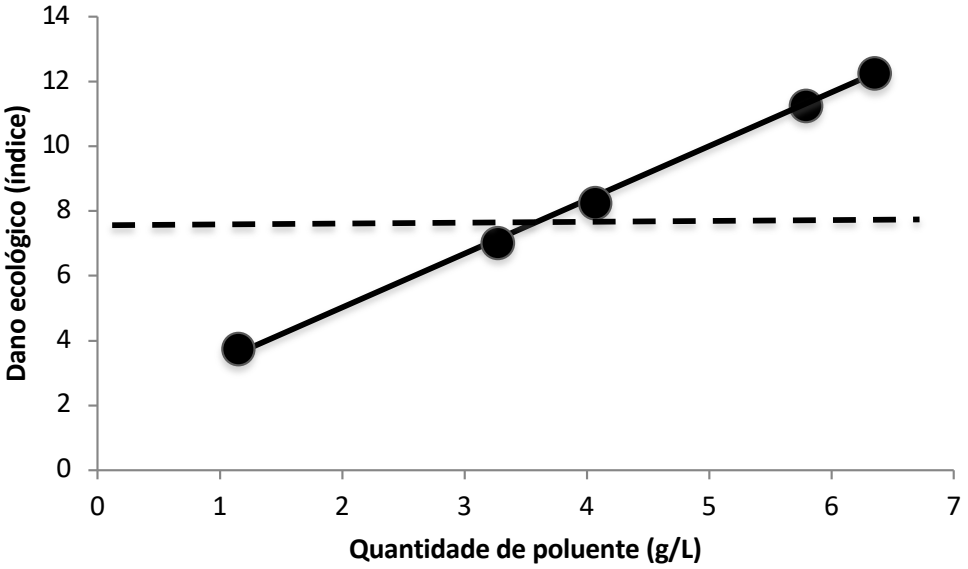
(variação aleatória + variação sistemática)

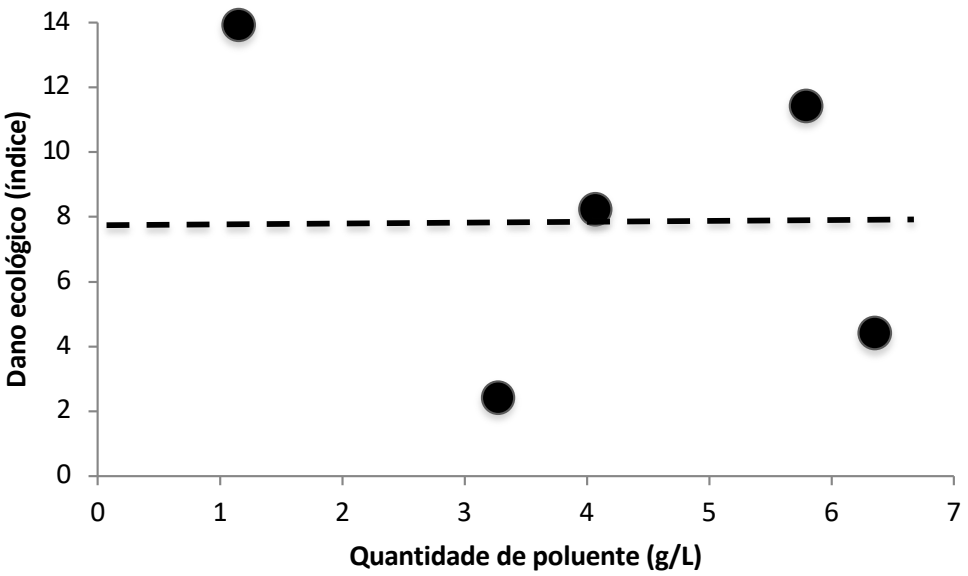
4. Coeficiente de determinação – r^2

Coeficiente de determinação (r^2) $= \dfrac{SQ_{reg}}{SQ_Y}$

Descreve a proporção da variação em Y explicada pela regressão com X

Importância relativa da variação sistemática versus a aleatória





$r^2 = 1$

$r^2 = 0$

5. Pressupostos do teste

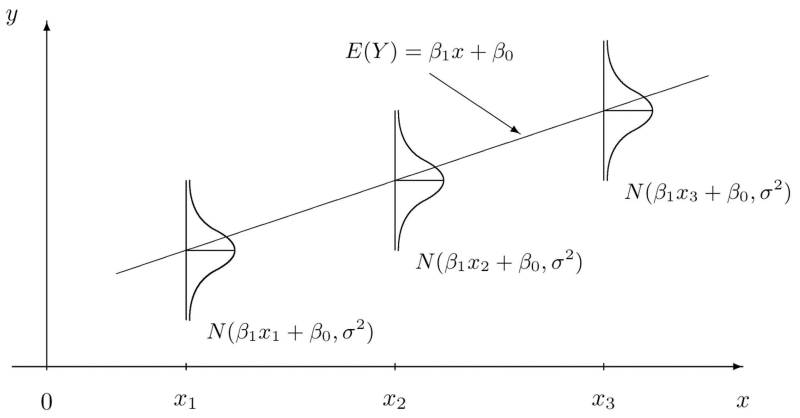
1. Pontos no gráfico devem apresentar tendência linear, caso contrário, a equação que melhor descreverá o fenômeno não será uma reta

2. A variável X é medida sem erros (alternativa: Regressão Modelo II)

PRESSUPOSTO FREQUENTEMENTE IGNORADO
Risco: subestimar o B

3. Para cada valor de X, os valores de Y são independentes e com erros com distribuição normal -> resíduos

4. A variação é constante ao longo da linha de regressão (homogeneidade das variâncias)

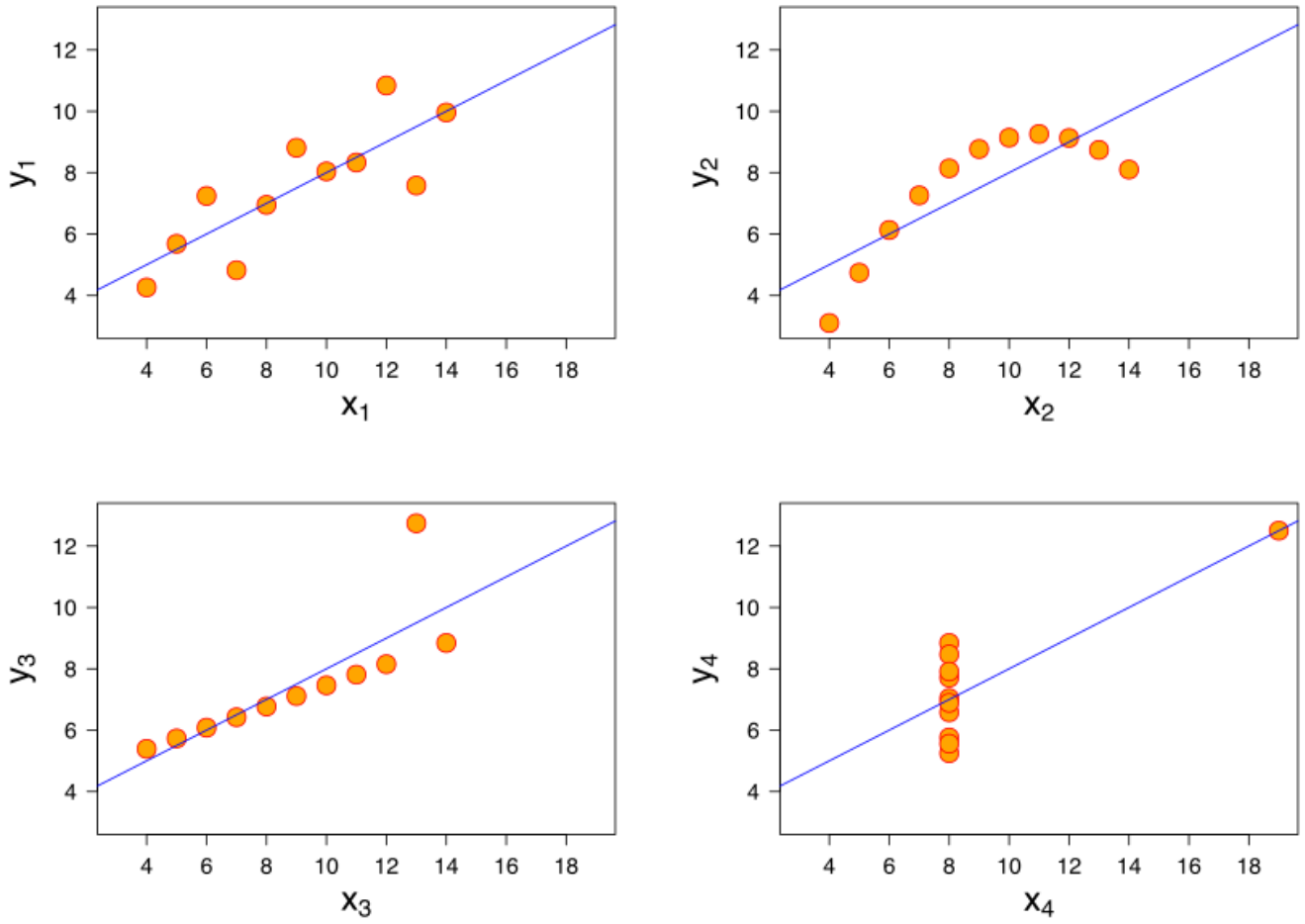


6. Procedimentos diagnósticos

Quarteto de Anscombe

$\hat{y}$= 3,00 + 0,500x

R^2= 0,67

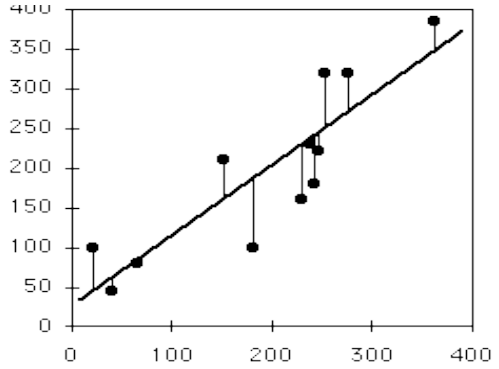


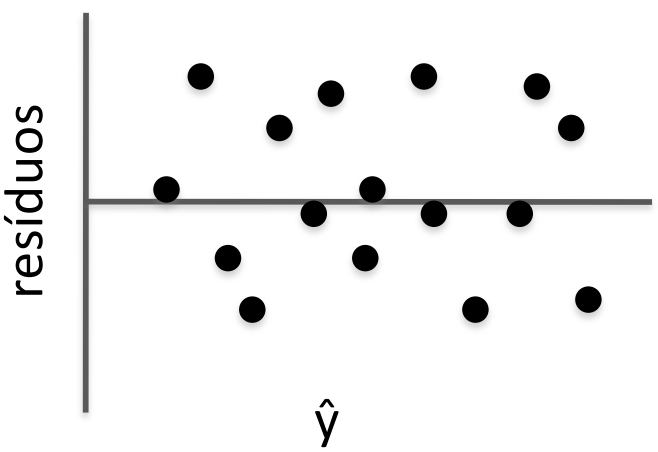
6. Análise dos resíduos

Gráfico diagnóstico para checar os pressupostos da regressão

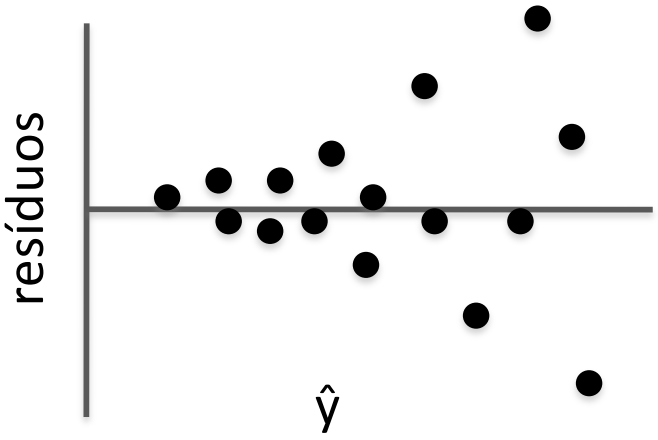
Resíduos no eixo vertical e os valores esperado de y (ŷ) no eixo horizontal

Resíduo = ε = y - ŷ

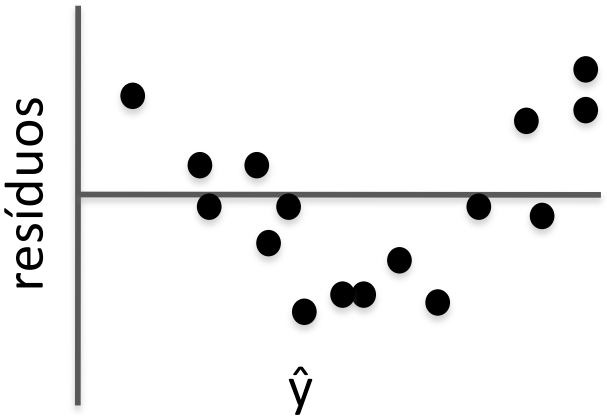




APROVADO!



Variâncias não homogêneas



Não linearidade

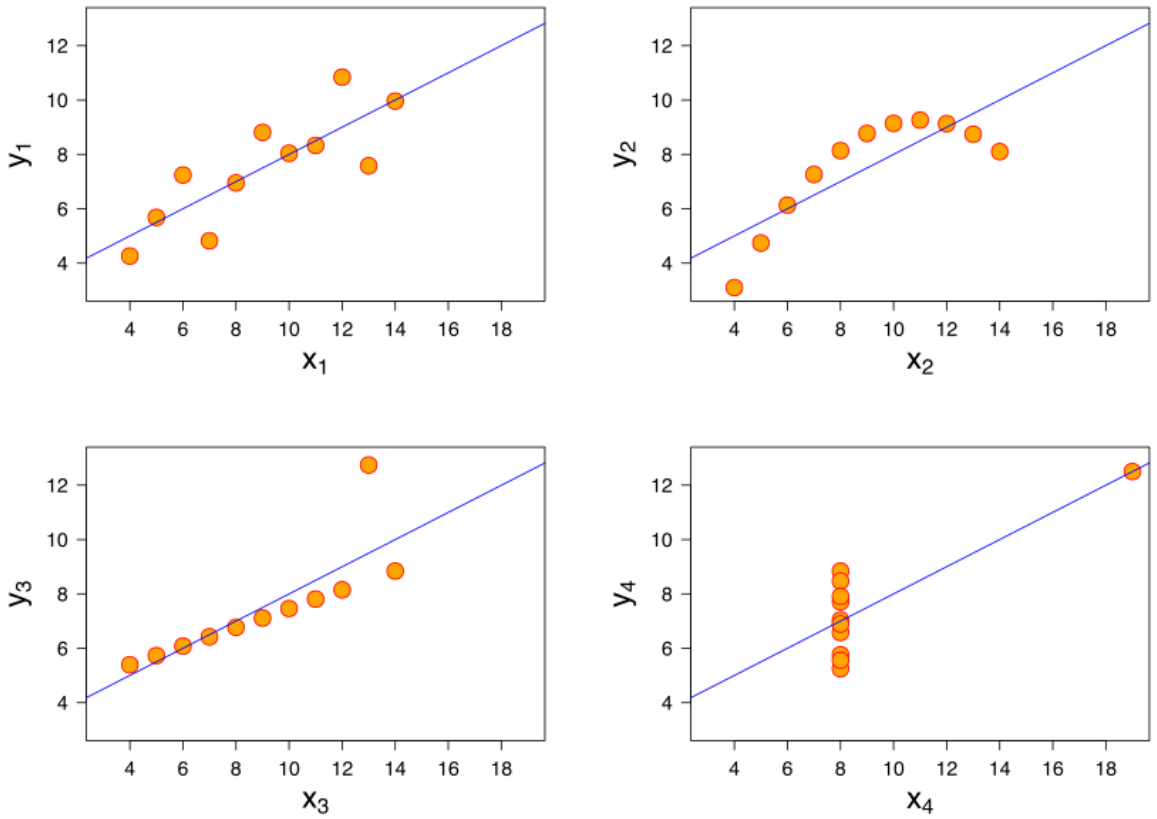
POSSÍVEL SOLUÇÃO:
transformação de dados

6. Outros diagnósticos

- sensibilidade ou função de influência

Forma de avaliar a estabilidade e validade geral das conclusões

Quarteto de Anscombe

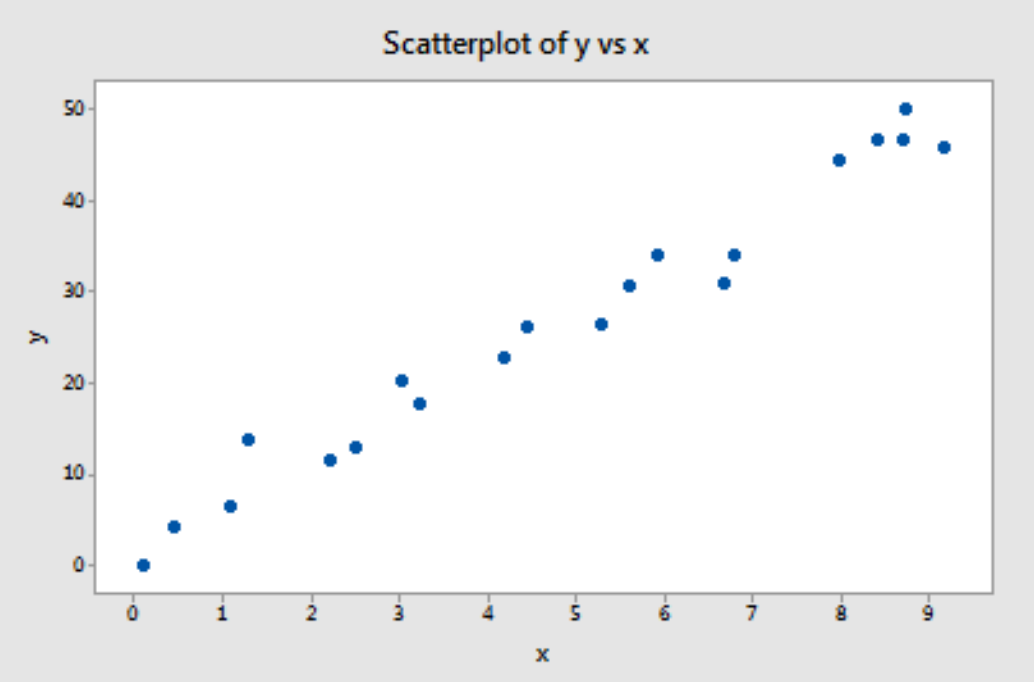


Distância de Cook

Mede a influência de cada dado considerando seu resíduo e sua "alavancagem"

Alta alavancagem= valor extremo de X

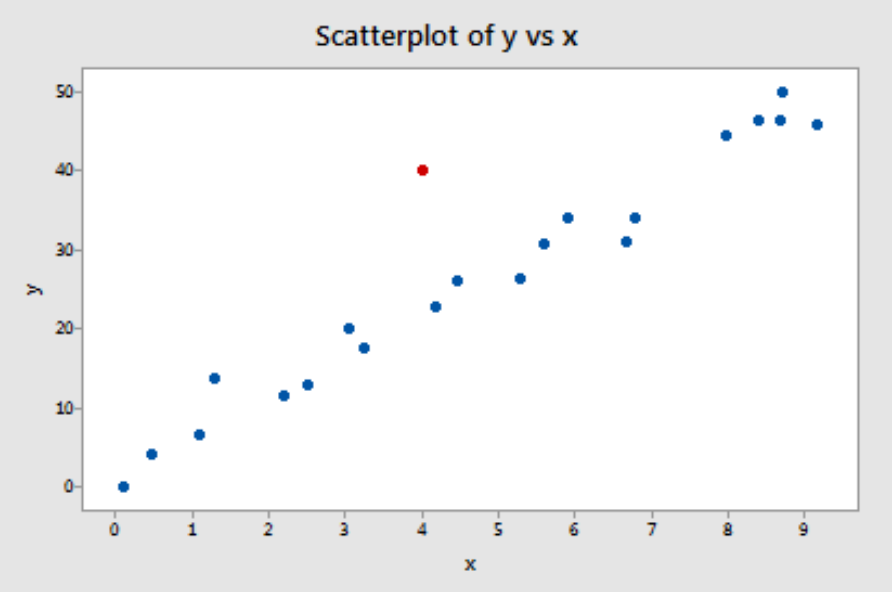
6. Outros diagnósticos



- ✓ Sem outliers
- ✓ Sem observações com alta alavancagem

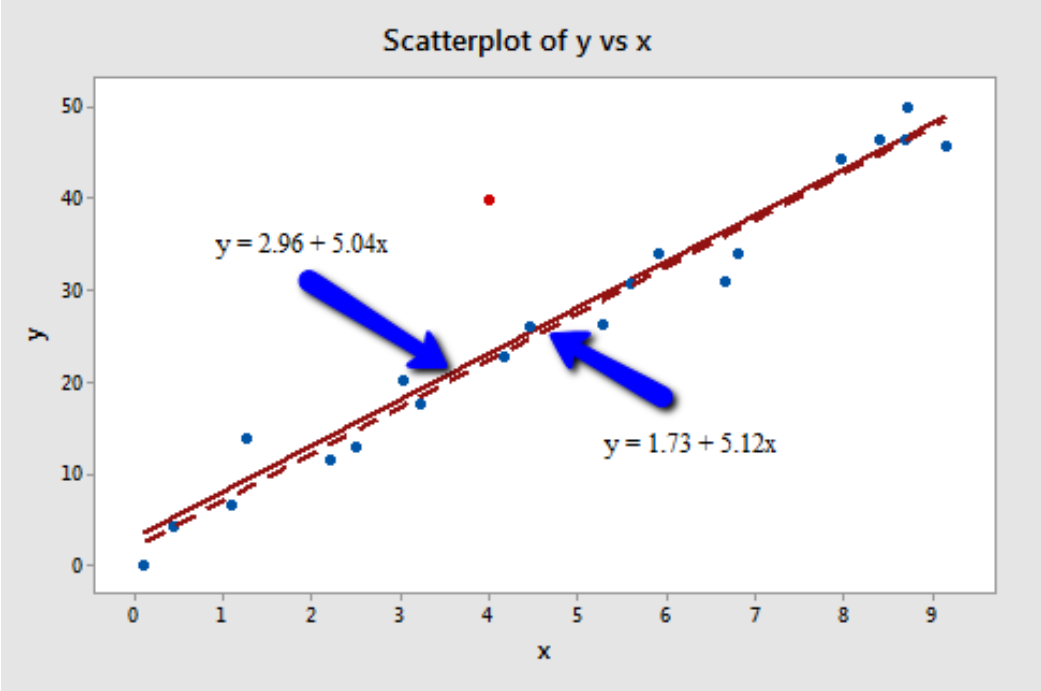
•Fonte: https://onlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/337

6. Outros diagnósticos



✓ **Um outlier**

✓ Sem observações com alta alavancagem



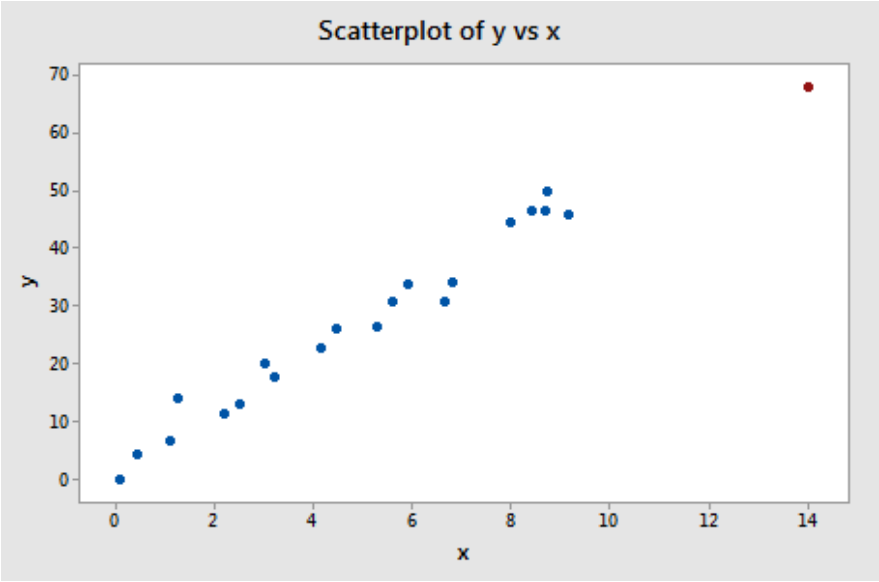
Resultados com pouca alteração nos coeficientes e r^2

Valor de P para H_0: B=0 é <0,001 no dois casos

Não há dados influentes!

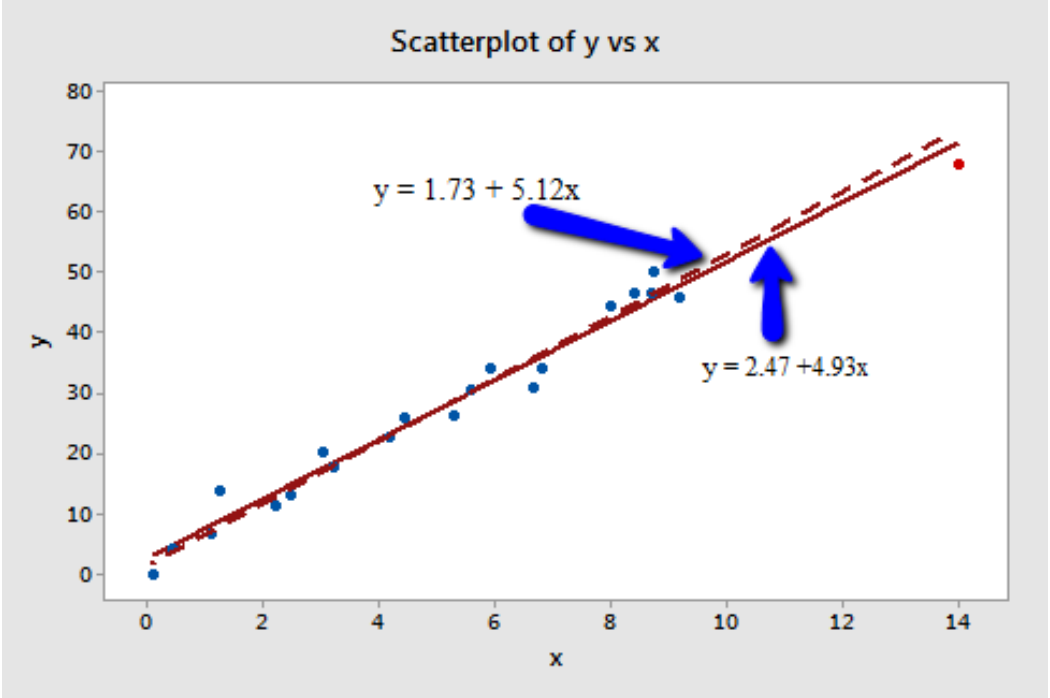
•Fonte: https://onlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/337

6. Outros diagnósticos



✓ Não há outliers

✓ **Um dado com alta alavancagem**

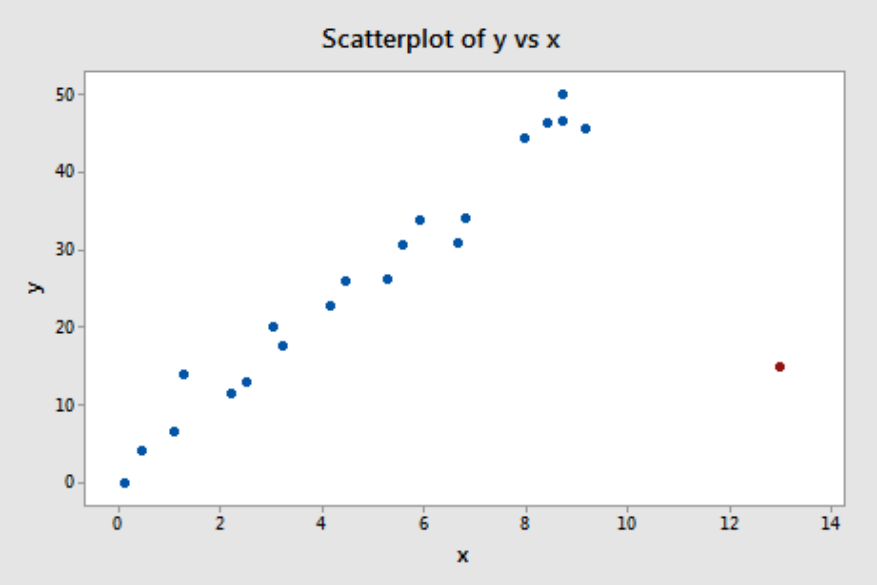


Resultados com pouca alteração

Não há dados influentes!

•Fonte: https://onlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/337

6. Outros diagnósticos

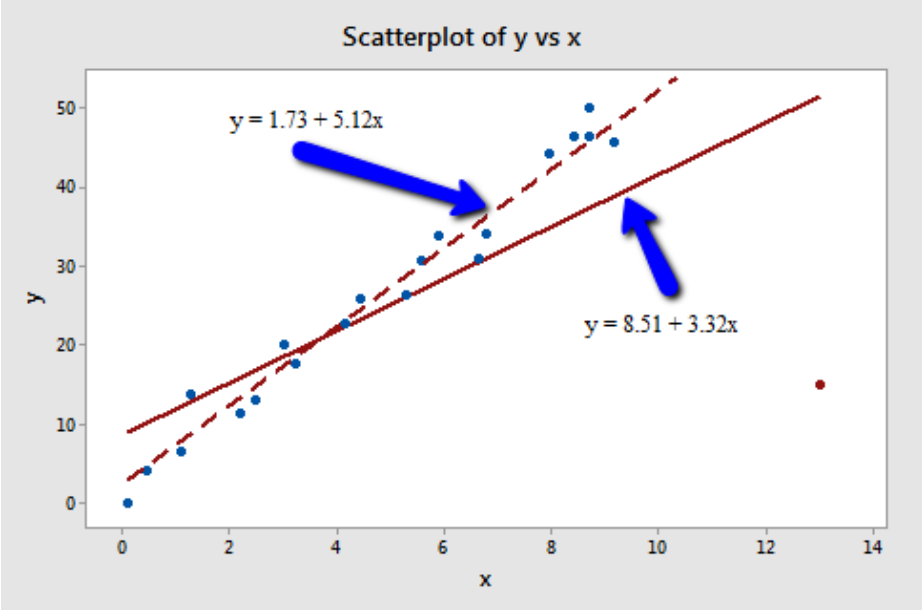


✓ **Ponto vermelho é um outlier e apresenta alta alvancagem**

Alteração substancial das estimatimas dos coeficientes do modelo (a e b) e r^2 (97% -> 55%)

Valor de P para H_0: B=0 é <0,001 no dois casos

Dado influente!



•Fonte: https://onlinecourses.science.psu.edu/stat501/node/337